PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A y 1^0B**

TEMA 5 -Álgebra lineal-

HOJA Nº9 (25 – 04 – 2017)

62. Averigua si las siguientes aplicaciones $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son o no formas bilineales. Si lo son, escribe la matriz asociada M_f y determina si la **forma bilineal es simétrica**, siendo $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{y} = (y_1, y_2)$

$a)$ $f(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$ $\quad c)$ $f(\underline{x},\underline{y}) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$

$b)$ $f(\underline{x},\underline{y}) = -x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2$ $\quad d)$ $f(\underline{x},\underline{y}) = x_1^2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2^2$

63. Sea V un $\mathbb{R}$ −espacio vectorial de dimensión 4 y $f: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal

que respecto de la base $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$ tiene como matriz asociada a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz asociada respecto de las bases:

$$B_1 = \{\underline{v_2}, \underline{v_4}, \underline{v_3}, \underline{v_1}\} \text{ y } B_2 = \{\underline{v_1}, \underline{v_1} + \underline{v_2}, \underline{v_1} + \underline{v_2} + \underline{v_3}, \underline{v_1} + \underline{v_2} + \underline{v_3} + \underline{v_4}\}$$

64. Considera la forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Determina $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$
b) Calcula $M_f(B)$ siendo $B = \{(1,1,-1),(0,-1,1),(-1,0,1)\}$

65. $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por
$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$. Halla $M_f(B)$ siendo $B = \{\underline{u}_1 = (2,0,0),\ \underline{u}_2 = (1,2,0),\ \underline{u}_3 = (-3,1,1)\}$

66. Sea la forma bilineal simétrica $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula $M_f(B)$ siendo $B = \{\underline{v_1} = \underline{e_1} + \underline{e_2} + \underline{e_3},\ \underline{v_2} = \underline{e_1} + \underline{e_2},\ \underline{v_3} = \underline{e_1}\}$.

67. Dada la forma bilineal simétrica $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\underline{e_1}, 3\underline{e_2}) = 3 \quad f(2\underline{e_1}, \underline{e_3}) = 4 \quad f(3\underline{e_2}, \underline{e_3}) = -3$$
$$f(\underline{e_1}, \underline{e_1}) = 0 \quad f(\underline{e_3}, \underline{e_3}) = 0 \quad f(2\underline{e_2}, 2\underline{e_2}) = -4$$

a) Halla M_f
b) Halla $M_f(B)$ siendo $B = \{(\underline{e_3} + \underline{e_2}),\ (\underline{e_1} + \underline{e_3}),\ (\underline{e_2} + \underline{e_1})\}$

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A y 1^0B**

TEMA 5 -Álgebra lineal-

HOJA Nº10 (25 – 04 – 2017)

68. Calcula la forma cuadrática asociada a la siguiente forma bilineal $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_3y_3$

69. ¿Cuál de las siguientes aplicaciones $q:\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ son formas cuadráticas?

a) $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1$

b) $q:\mathbb{P}_2[x]\to\mathbb{R}$ definida por $q(a+bx+cx^2) = c^2+b^2+a^2+2ab$

70. Dada la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = xy + y^2 + 4xz + z^2$, halla:

a) La matriz simétrica asociada A.

b) El subespacio conjugado del vector $\underline{v_1} = (1,0,0)$

c) Una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores conjugados dos a dos

d) La matriz simétrica asociada a q respecto de la nueva base hallada en c)

e) El núcleo de q. Clasifica la forma dada en ordinaria o degenerada

f) La matriz simétrica asociada a q respecto de la base $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

71. Responde a los mismos apartados del ejercicio anterior para la forma cuadrática $q(x,y,z) = xy + yz$

72. Diagonaliza las siguientes formas cuadráticas y clasifícalas

a) $q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 8xz + 15y^2 - 20yz + 11z^2$

b) $q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4yz + 2z^2$

c) $q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_1x_4 + 4x_2x_4 - 8x_3x_4$

d) $q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 3x_3^2 - 6x_3x_4 + 5x_4^2$

73. Se considera la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_3x_4 + 2x_4^2$$

Determina $\alpha\in\mathbb{R}$ para que q no sea degenerada.

74. Sea $q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ la forma cuadrática que tiene por expresión

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + \alpha x_2^2 + 2x_3^2 + \alpha x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

Se pide en función del valor de $\alpha\in\mathbb{R}$:

a) Diagonaliza q

b) Rango y signatura de q

c) Estudia si q es definida o semidefinida

75. Diagonaliza, mediante operaciones elementales, la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ que verifica

$$q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

obteniendo una base de $\mathbb{R}^3$ en la que q adopta la expresión diagonal que se obtenga

76. Se considera la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3$$

Clasifica q en función de $\alpha\in\mathbb{R}$.

77. Encuentra los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por: $x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz$ es definida positiva